

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅 
管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
园龄：4年7个月
粉丝：288
关注：5
[+加关注](#)

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动你的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

积分 - 457097
排名 - 1198

单变量微积分笔记1——导数1(导数的基本概念)

什么是导数

导数是高数中的重要概念，被应用于多种学科。

从物理意义上讲，导数就是求解变化率的问题；从几何意义上讲，导数就是求函数在某一点上的切线的斜率。

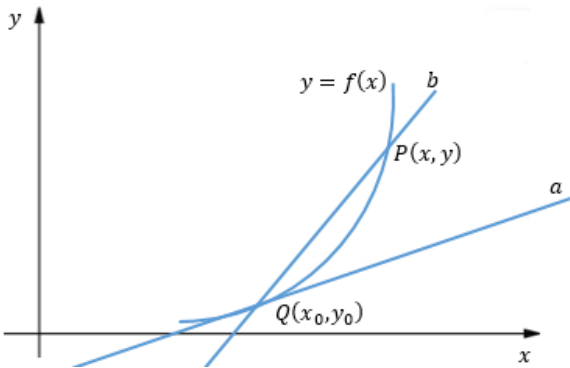
我们熟知的速度公式： $v = s/t$ ，这求解的是平均速度，实际上往往需要知道瞬时速度：

$$v = \frac{s - s_0}{t - t_0}$$

当 t 趋近于 t_0 ，即 $t - t_0$ 趋近于0时，得到的就是瞬时速度。设 $\Delta t = t - t_0$ ， s 是 t 的函数 $s = f(t)$ ，瞬时速度用数学表示就是：

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

从几何意义上讲，导数是函数在某一点处的切线的斜率：



直线 a 与曲线相切于点 Q ，直线 b 与曲线相割于点 Q 和点 P 。 b 的斜率是 $k = (y - y_0)/(x - x_0)$ ，当 b 以 Q 为轴心沿着曲线旋转时，弦长 $|PQ|$ 趋近于0，即 $x \rightarrow x_0$ 时，极限存在：

$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

由上述两个问题可以看出，变化率和切线的问题都可以归结为下面的公式：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

令 $\Delta x = x - x_0$ ， $\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ，上面的公式可以写成：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫大人

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{或} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

由此得出导数的概念，设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx ，且 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内时， y 取得增量 Δy ；如果 Δy 与 Δx 之比在 $\Delta x \rightarrow 0$ 时存在极限，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$ ：

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

也记作：

$$f' = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$$

简写为：

$$f' \text{ 或 } \frac{dy}{dx}$$

1/x求导

根据导数公式，代入 $f(x) = 1/x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x}$$

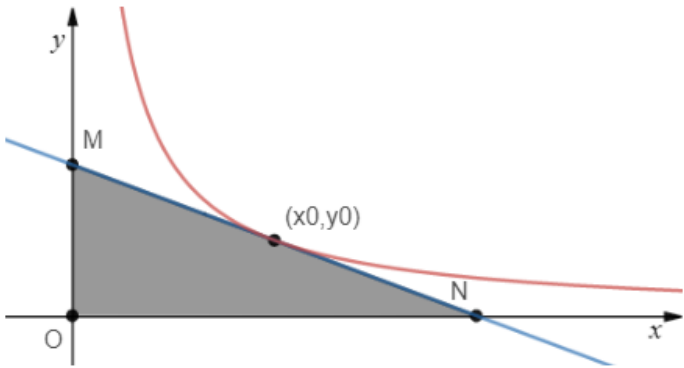
这就OK了，所以说导数很简单，因为它仅有一个公式。但没完，因为上式没有任何意义，仅仅是看起来更复杂了。如果我们直接观察导数公式，对于所有求导，当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，分母都为0，所以必须将导数进一步简化。

$$\frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{-\Delta x}{(x + \Delta x)x} \right) = \frac{-1}{x^2 + x\Delta x}$$
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2 + x\Delta x} = \frac{-1}{x^2}$$

“求 $f(x)$ 的导数”或“对 $f(x)$ 求导”有两种解释，一种是求 $f(x)$ 的**导函数**，此时的结果是一个函数；另一种是求 $f(x)$ 在定义域某一点的**导数**，此时的结果是将该点的值代入**导函数**，最终得到一个具体的数值。究竟是哪种解释需要根据上下文判断，通常都很直白，不必太过纠结。

求切线所在三角形的面积

直线MN是曲线 $1/x$ 的切线，切点是 (x_0, y_0) ，求 $S_{\triangle MON}$



2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程 提个issue，最速降线中 $v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

$S_{\triangle MON} = 1/2(OM \times ON)$ ，已知条件是切点 (x_0,y_0) ，需要求解的未知条件是OM和ON。

直线MN的函数是 $y=kx+b$ ， $1/x$ 在 (x_0,y_0) 的导数是MN的斜率，即 $k = -1/x_0^2$:

$$\begin{aligned} y &= kx + b \\ \frac{1}{x_0} &= -\frac{x_0}{x_0^2} + b \\ b &= \frac{2}{x_0} \end{aligned}$$

设M点的坐标是 $(x,0)$ ，代入 $y=kx+b$:

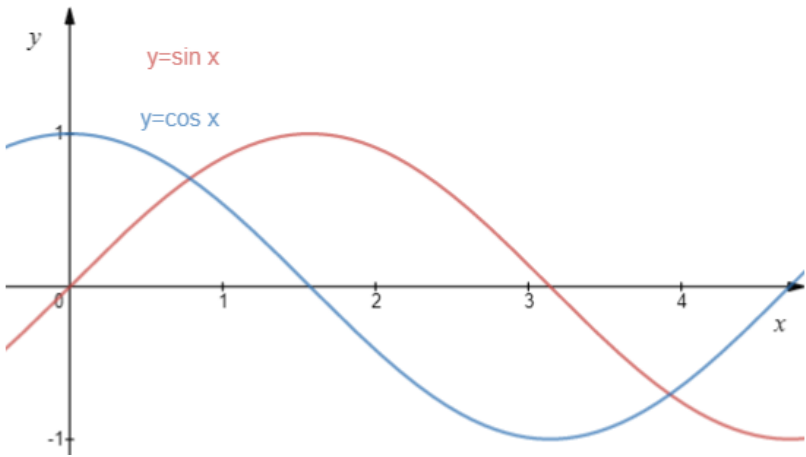
$$0 = -\frac{x}{x_0^2} + \frac{2}{x_0} \Rightarrow OM = x = 2x_0$$

同理， $ON=2y_0$

$$S_{\triangle MON} = \frac{OM \times ON}{2} = \frac{2x_0 \times 2y_0}{2} = 2x_0y_0 = 2x_0 \frac{1}{x_0} = 2$$

sin和cos求导

先来看两个函数的曲线:



$$\sin 0^\circ = 0, \sin 90^\circ = \sin(\pi/2) = 1$$

求导时需要用到几个公式:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \quad (\text{公式 1})$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (\text{公式 2})$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} = 1 \quad (\text{公式 3})$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1 \quad (\text{公式 4})$$

1、2不解释，3、4后面会给出证明。

sin' x = ?

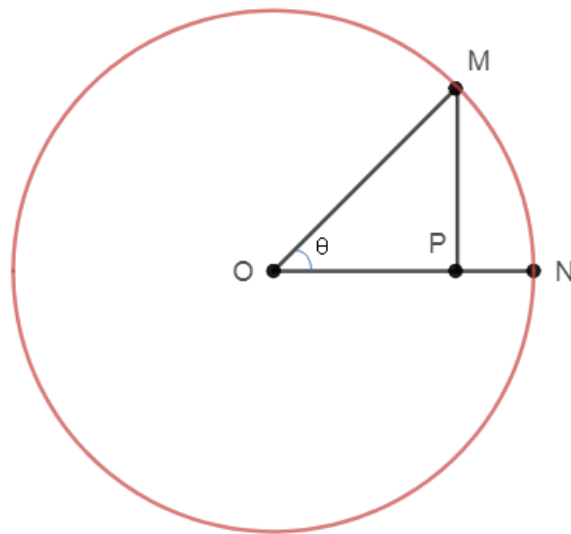
$$\begin{aligned}
 \sin' x &= \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\
 &= \frac{\sin x \cos \Delta x + \sin \Delta x \cos x - \sin x}{\Delta x} \\
 &= \frac{\sin x (\cos \Delta x - 1) + \sin \Delta x \cos x}{\Delta x} \\
 &= \frac{\sin x (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \frac{\sin \Delta x \cos x}{\Delta x} \quad (\text{使用公式 3 和公式 4}) \\
 &= 0 + \cos x \\
 &= \cos x
 \end{aligned}$$

cos' x = ?

$$\begin{aligned}
 \cos' x &= \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\
 &= \frac{\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} \\
 &= \frac{\cos x (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} - \frac{\sin x \sin \Delta x}{\Delta x} \quad (\text{公式 3、4}) \\
 &= 0 - \sin x \\
 &= -\sin x
 \end{aligned}$$

为什么会有公式3、4

公式3需要从几何意义上证明。



上图是一个单位圆，将 Δx 用 θ 替换。由于单位圆的特性使半径 $r=1$ ，弧长 $MN=\theta$ 。

公式3:

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \frac{OP}{OM} = OP \\
 \Rightarrow 1 - \cos \theta &= ON - OP = NP \\
 \Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} &= \lim_{\text{弧长 } MN \rightarrow 0} \frac{PN}{\overline{MN}}
 \end{aligned}$$

当 θ 趋近于0时，PN比弧长MN更快地趋近于0，所以公式3成立。

公式4的道理与公式3类似。 $\sin \theta = MP/OM = MP$ ，当 θ 趋近于0时，MP越来越趋近于MN（二者越来越相等）。

幂函数求导

总是用极限的方式求导太过麻烦，幸而人们总结出了一系列求导公式。其中幂函数求导就可以直接使用公式：

$$f(x) = x^n \quad \text{then} \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

例如：

$$(3x^6)' = 3 \times 6x^{6-1} = 18x^5$$

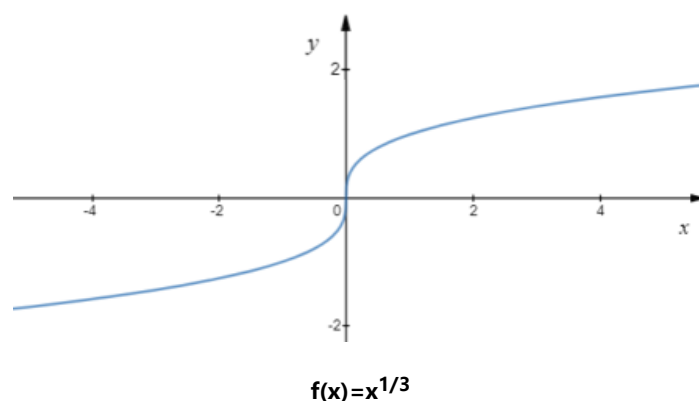
函数可导的条件

如果一个函数的定义域为全体实数，即函数在其上都有定义，那么该函数是不是在定义域上处处可导呢？答案是否定的。函数在定义域中一点可导需要一定的条件：函数在该点的左右两侧导数都存在且相等。这实际上是按照极限存在的一个充要条件（极限存在，它的左右极限存在且相等）推导而来。

简单来说，可导的函数一定连续；连续的函数不一定可导，不连续的函数一定不可导。

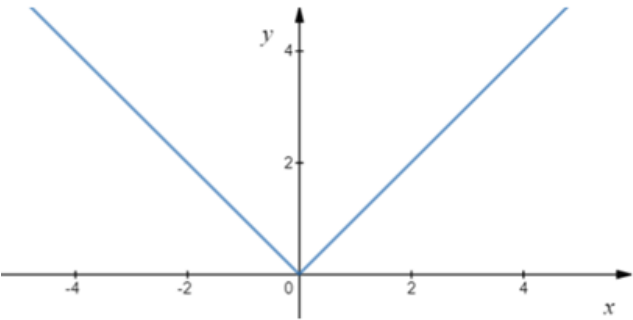


下面是两个不可导的例子：



$f(x)=x^{1/3}$, $f'(x)=x^{-2/3}/3$ 在 $x=0$ 处分母为0，所以在 $x=0$ 处不可导。实际上该函数在 $x=0$ 处的切线是 y 轴，导数趋近于无穷，不符合导数的定义，导数代表变化率，变化率一定是定值，不会有趋于无穷的变化率。

再来看另一个：



$f(x)=|x|$

几何上，切线指的是一条刚好触碰到曲线上某一点的直线。更准确地说，当切线经过曲线上的某点（即切点）时，切线的方向与曲线上该点的方向是相同的。 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 点时，曲线没有唯一方向，即在 $x=0$ 点没有切线，所以该函数在 $x=0$ 点不可导。

出处：微信公众号“我是8位的”

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”



随笔

分类: [单变量微积分](#)

标签: [导数](#)

[好文要顶](#)[关注我](#)[收藏该文](#)



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

[+加关注](#)

0

0

推荐

反对

« 上一篇: [使用Apriori进行关联分析 \(一\)](#)
» 下一篇: [单变量微积分笔记2——导数2\(求导法则和高阶导数\)](#)

posted on 2017-08-27 21:31 我是8位的 阅读(3647) 评论(2) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

 登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

yo zodcs.com

永中DCS_文档在线
预览解决方案

兼容不同版本的Office、PDF等，特定格式的合作，支持Windows、信创环境下一键部署

打开 >

编辑推荐：

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间：2022年3月8日~3月18日



最新新闻：

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes